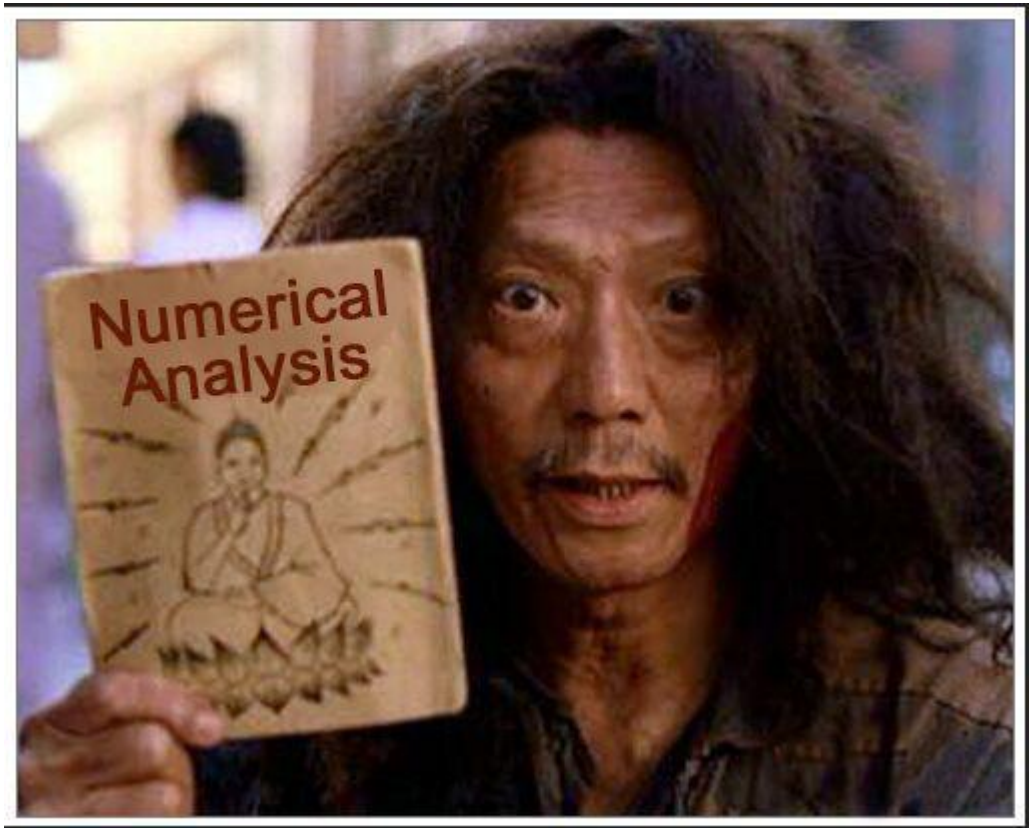
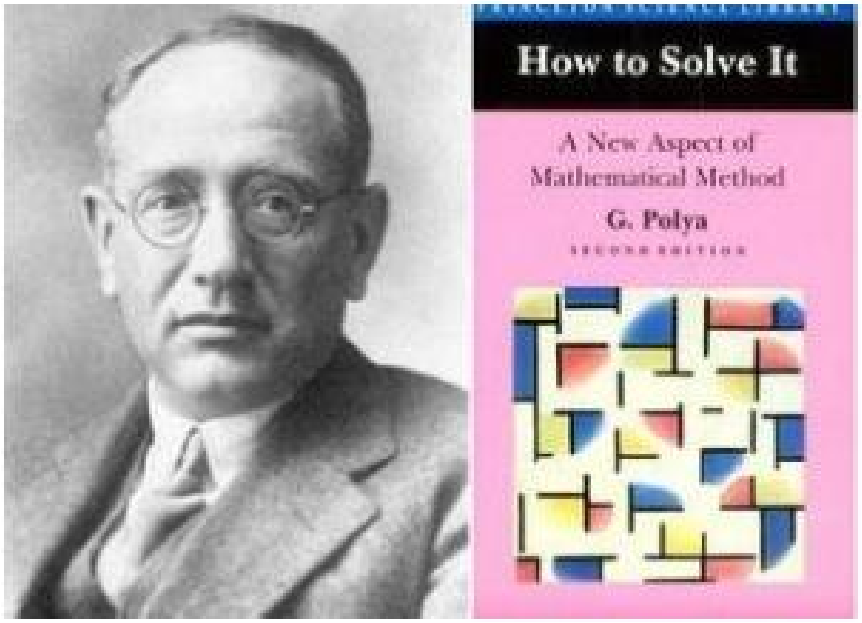
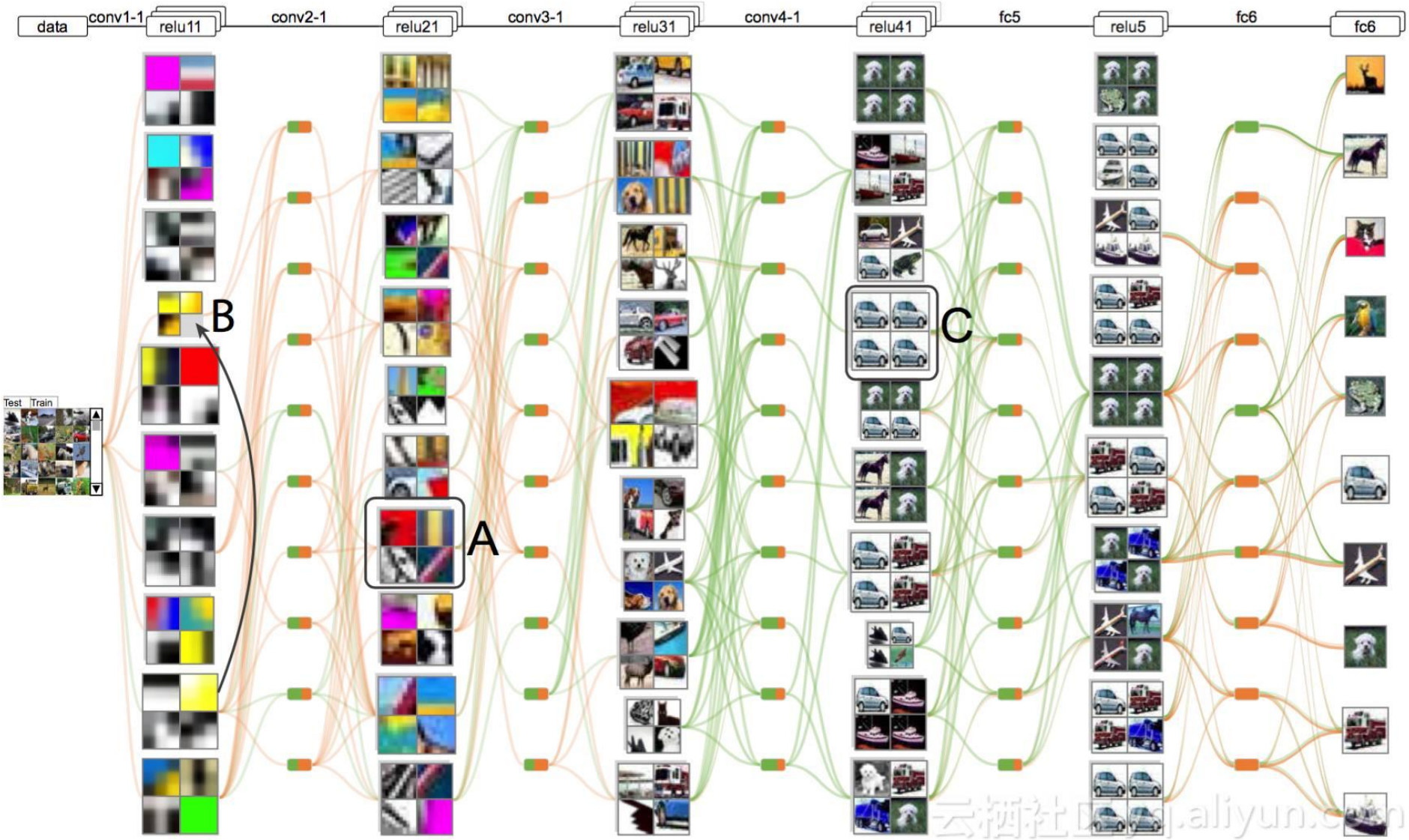


化：化大为小，化繁为简，化难为易，…

“If you don’t know how to solve a problem, there must be a related but easier problem you know how to solve. See if you can reduce the problem to the easier one.”

G. Polya



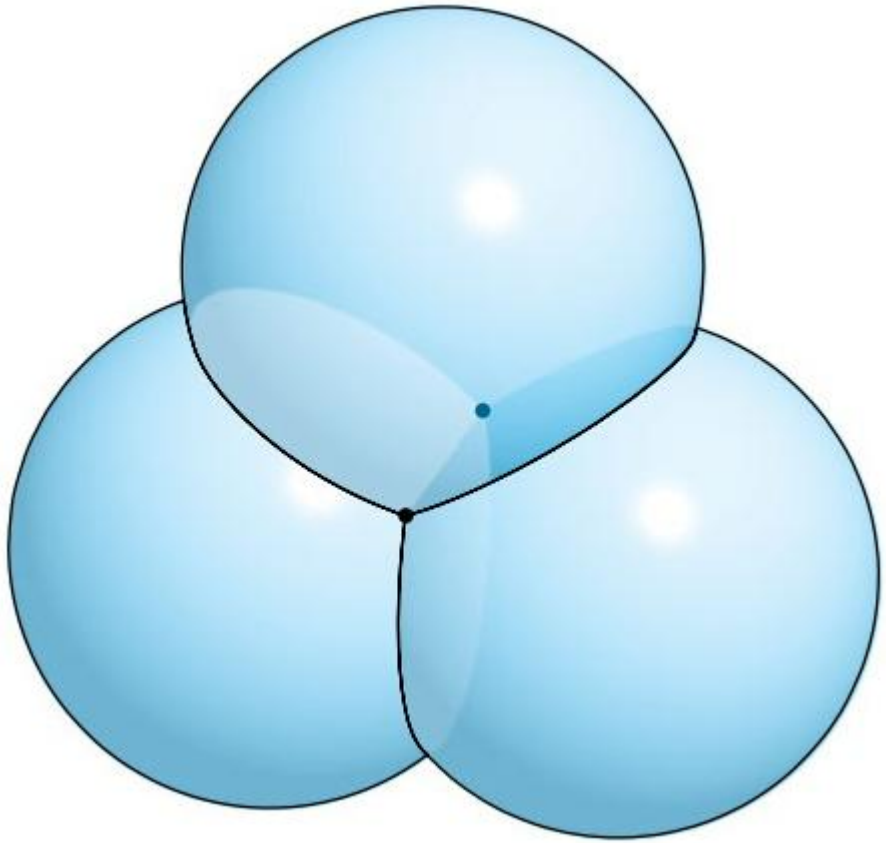

data
conv1-1
relu11
conv2-1
relu21
conv3-1
relu31
conv4-1
relu41
fc5
relu5
fc6
fc6
Test
Train
A
B
C

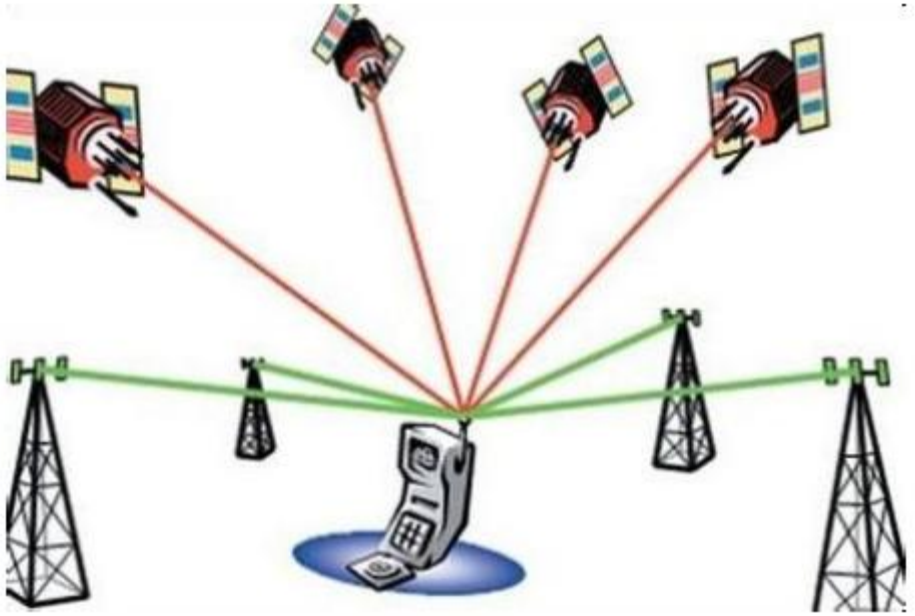
科学家早就意识到自然现象的非线性，例如费米曾感叹道：“《圣经》里也没有说自然定律要表示成线性的。” 实际上，自然界里一切物质运动都遵循着非线性形式的规律。至于线性理论中的线性方程等线性数学表示，只是对客观运动在一定条件下的近似摹写。诚然，因受实验观测手段的限制(或者人工实验附加了特定条件),某些机理的非线性因素未必明晰地显露(或者被强烈抑制)，那末对其若用线性理论描述，即能达到满意的结果。但随着实验实践的发展，任何机理终究要以愈来愈完整的面目呈现；因为物质之间的相互作用实际上并不单一、相当复杂，故而物质运动往往不会是比较简单的线性形式。所以说，线性是非线性的特例，线性理论是相当复杂的非线性运动之比较简单的近似描述；对机理的描述从线性演变为非线性，实乃理论进步之必然。

非线性方程的求根是非线性科学一个不可或缺的研究内容。

A common problem encountered in engineering analysis is this: given a function $f(x)$, determine the values of x for which $f(x) = 0$. The solutions (values of x) are known as the roots of the equation $f(x) = 0$, or the zeroes of the function $f(x)$.

GPS (Global Positioning System)





	xyz位置	收到信号时间
S1	3,2,3	10 010.006 922 86
S2	1,3,1	10 013.342 563 81
S3	5,7,4	10 016.678 204 76
S4	1,7,3	10 020.013 845 71
S5	7,6,7	10 023.349 486 66
S6	1,4,9	10 030.020 768 57

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(10010.00692286c)^2 \\ (x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=(10013.34256381c)^2 \\ (x-5)^2+(y-7)^2+(z-4)^2=(10016.67820476c)^2 \\ (x-1)^2+(y-7)^2+(z-3)^2=(10020.01384571c)^2 \\ (x-7)^2+(y-6)^2+(z-7)^2=(10023.34948666c)^2 \\ (x-1)^2+(y-4)^2+(z-9)^2=(10030.02076857c)^2 \end{cases}$$

其中(x,y,z,t)表示点的当前位置。

Reference: https://www.zhihu.com/question/20903715

例: 高于 4 次的代数方程, 不存在通用的求根公式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\ \ (a_n\neq 0)$$

超越[1]方程一般没有显示解[2]

$$f(x)=e^x-\cos(\pi x)$$

注1：A transcendental function "transcends" algebra in that it cannot be expressed in terms of a finite sequence of the algebraic operations of addition, subtraction, multiplication, division, and raising to a power.

注2：It may contain constants, variables, certain "well-known" operations (e.g., + − × ÷), and functions (e.g., nth root, exponent, logarithm, trigonometric functions, and inverse hyperbolic functions), but usually no limit, differentiation, or integration.

求 $f(x)=0$ 根的问题包括如下方面：

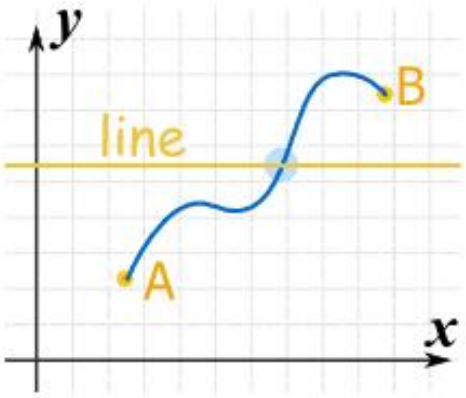
- **根的存在性**，即$f(x)=0$有没有根？若有，有几个根？
- **根的范围**，确定有根区间
- **求根的方法**，已知一个根的近似值后，能否将它精确到足够精度？

Where is
Flight MH370?

可证伪性(Falsifiability)

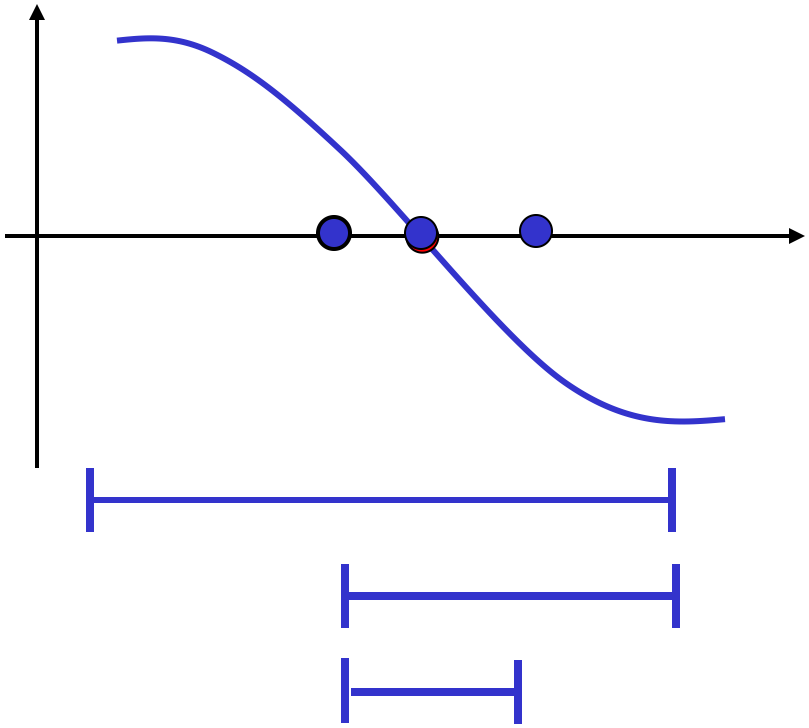
对于数学家来说, 一个数学概念的存在性与唯一性是特别需要加以关注的。这是因为从形式逻辑度看, 如果某个事物并不存在, 那么关于这个杜撰中的事物所给出的任何陈述或判断都可认为是正确的或错误的, 因为对于不存在的事物来说, 任何关于它的陈述或判断都不可能加以证伪。因而根据波普尔的证伪主义观点, 这样的研究不具备科学上的意义。所以, 我们在对任何新提出来的数学概念加以系统研究之前, 苜先需要弄清楚所研究的对象事物是否存在。

定理 (零点定理) 若函数f在闭区间$[a, b]$上连续, 且$f(a)$与$f(b)$异号, 则至少存在一点 x_0属于(a,b), 使得$f(x_0)=0$, 即方程$f(x)=0$在(a,b)内至少有一个根。



零点定理回答了根的存在性和根的范围的问题, 如何去寻找足够精度的根?

游戏:请同学们猜测这部电脑的价格?



化:化大为小

二分法

已知$f(x)=0$在$[a_0,b_0]$内有唯一根,且$f(a_0)f(b_0)<0$

(1)计算 $x_{n-1}=0.5(a_{n-1}+b_{n-1})$和$f(x_{n-1})$

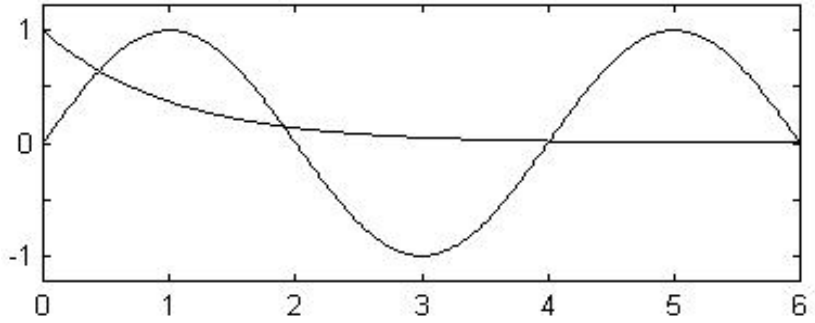
判断若$f(x_{n-1})=0$,则x_{n-1}是根,否则转下一步;

(2)判断若$f(x_{n-1})\ f(a_{n-1})<0$,则$a_n\leftarrow a_{n-1}, b_n\leftarrow x_{n-1}$

否则 $a_n\leftarrow x_{n-1}$, $b_n\leftarrow b_{n-1}$

例 1 二分法求方程 $e^{-x} - \sin(\frac{\pi x}{2}) = 0$ 在区间 [0, 1]内的根。

- curve sketching is one way or...



- best: use a Matlab plot to get the lay of the land

```
ezplot('exp(-x)-sin(pi*x/2)',0,1)
```

例 1 二分法求方程 $e^{-x}-\sin(\frac{\pi x}{2})=0$ 在区间[0, 1]内的根。

解: 令 $f(x)=e^{-x}-\sin(\frac{\pi x}{2})$

$$f(0)=1>0 \quad f(1)=e^{-1}-1<0 \quad \Rightarrow f(0)f(1)<0$$

$$f'(x)=-[e^{-x}+\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x}{2})]<0,\ 0<x<1$$

函数在[0,1]内有唯一零点, 故[0,1]是隔根区间。

func=@(x) exp(-x)-sin(pi/2*x);%匿名函数

n	函数值符号	区间
1	$f(0.5)= - 0.1006<0$	[0,0.5]
2	$f(0.25)=0.3961>0$	[0.25,0.5]
3	$f(0.375)=0.1317>0$	[0.375,0.5]
4	$f(0.4375)=0.0113>0$	[0.4375,0.5]

$x_4=0.5(0.4375+0.5)=0.4688$作为近似值。

二分法

已知$f(x)=0$在$[a_0,b_0]$内有唯一根,且$f(a_0)f(b_0)<0$

(1)计算 $x_{n-1}=0.5(a_{n-1}+b_{n-1})$和$f(x_{n-1})$

判断若$f(x_{n-1})=0$,则x_{n-1}是根,否则转下一步;

(2)判断若$f(x_{n-1})\ f(a_{n-1})<0$,则$a_n \leftarrow a_{n-1}, b_n \leftarrow x_{n-1}$

否则 $a_n \leftarrow x_{n-1}$, $b_n \leftarrow b_{n-1}$

```
function root = bisect(f,a,b,n) %区间有唯一根
fa = feval(f,a);
fb = feval(f,b);
for i = 1:n
   x= 0.5*(a + b);
   fx = feval(f,x);
   if fx == 0
      root = x; return
   end
   if fb*fx < 0
      a =x; fa = fx;
   else
      b = x; fb = fx;
    end
end
root = (a + b)/2;
```

二分法

已知$f(x)=0$在$[a_0,b_0]$内有唯一根,且$f(a_0)f(b_0)<0$

(1)计算 $x_{n-1}=0.5(a_{n-1}+b_{n-1})$和$f(x_{n-1})$

判断若$f(x_{n-1})=0$,则x_{n-1}是根,否则转下一步;

(2)判断若$f(x_{n-1})\,f(a_{n-1})<0$,则$a_n \leftarrow a_{n-1}, b_n \leftarrow x_{n-1}$

否则 $a_n \leftarrow x_{n-1}$, $b_n \leftarrow b_{n-1}$

二分法迭代将得到区间序列和中点序列

$$[a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset \cdots$$

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \cdots \rightarrow x_n$$

性质 $b_n - a_n = (b_0 - a_0)/\ 2^n$

定理 设x^*是$f(x)=0$在$[a_0, b_0]$内的唯一根,且$f(a_0)f(b_0)<0$,则二分过程中,各区间的中点数列

$$x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)(n = 0,1,2,\cdots)$$

满足 $|x_n - x^*| \le (b_0 - a_0)/\ 2^{n+1}$

注记: 若要满足中止准则$|x_n - x^*| \le$ tolerance (容许偏差)

只需 $\dfrac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \le \dfrac{1}{2} \times 10^{-3}$ ➔ $\boxed{n \ge \log_2 \dfrac{b_0 - a_0}{\text{tolerance}}}$

https://ww2.mathworks.cn/help/optim/ug/tolerances-and-stopping-criteria.html

二分法的反思:

思想简单, 仅需函数值符号, 容易实现。

收敛速度慢和不能求复根和多元非线性方程等不足。

迭代的思想

设$f(x)=0$的根为x^*,通过迭代计算,产生序列:

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \cdots$$

只须 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

二分法思想朴素却蕴含了迭代法的近似逼近思想。

迭代法是一种逐次逼近法，这种方法使用某个固定公式反复校正根的近似值，使之逐步精确化，最后得到满足精度要求的结果。

Comes out with industry-shaking new products, then makes co*nstant*, incremental improvements to them.

互联网思维：迭代

Google面试题：假如有一个巨大的数组(你可以理解成一串数字), 如何用最有效的方法找到它的中值？

https://www.jianshu.com/p/99d6832dcb00